Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Académico Profesional de Matemática

Existencia, unicidad y regularidad de solución de una ecuación hiperbólica no lineal con término dispativo friccional

TESINA

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Carlos QUISPE PALOMINO

ASESOR

Dr. Alfonso PÉREZ SALVATIERRA

Lima, Perú

2010

Referencia bibliográfica

Quispe, C. (2010). *Existencia, unicidad y regularidad de solución de una ecuación hiperbólica no lineal con término dispativo friccional*. Tesina para optar el título de Licenciado en Matemática. Escuela Académico Profesional de Matemática, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

Índice general

Capítulo 1

Preeliminares

1.1. Desigualdades importantes

Lema 1 (Desigualdad de Gronwall) *Sea f continua y no negativa en* $[0, a]$, *K y M constantes. Si se satisface:*

$$f(t) \leq K + M \int_0^t f(s)ds, \quad \forall t \in (0, a]$$

entonces $f(t) \leq Ke^{Mt}, \quad \forall t \in (0, a]$. *En particular: si* $K = 0$ *entonces* $f(t) = 0$.

Demostración. *Sea* $U(t) = K + M \int_0^t f(s)ds$, *y observe que* $U(0) = K$. *entonces* $f(t) \leq U(t)$ *por hipotesis, y, por el teorema fundamental de cálculo, nosotros obtenemos.*

$$U'(t) = Mf(t) \leq MU(t) \qquad 0 \leq t \leq a$$

Nosotros moltiplicamos esta desigualdad por e^{-Mt} *y aplicamos la identidad*

$$U^{'}(t)e^{-Mt} - MU(t)e^{-Mt} = (U(t)e^{-Mt})'$$

para obtener:

$$\frac{d}{dt}\left[U(t)e^{-Mt}\right] \leq 0$$

Integrando de 0 *a* t *tenemos:*

$$U(t)e^{-Mt} - U(0) \leq 0$$

y desde que $f(t) \leq U(t)$ *y* $U(0) = K$,

$$f(t) \leq U(t) \leq Ke^{Mt} \qquad (0 \leq t \leq a)$$

que es la desigualdad deseada.

Lema 2 (Desigualdad de Young) *Si $1 < p, q < +\infty$ son conjugadas entonces:*

$$a^{1/p}.b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}; \quad \forall a, b \geq 0$$

Demost.
Primero probaremos lo siguiente; si $a, b > 0$ y $0 < t < 1$, se cumple:

$$a^t.b^{1-t} \leq at + b(1-t)$$

Consideremos en primer lugar, $0 < a \leq b$
Observe que:

$$\begin{aligned} a^t.b^{1-t} \leq at + b(1-t) \quad &\Leftrightarrow \quad a^{t-1}.b^{1-t} \leq t + \frac{b}{a}(1-t) \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{b}{a}\right)^{1-t} \leq t + \frac{b}{a}(1-t) \text{ con } \frac{b}{a} \geq 1 \end{aligned}$$

Definimos:

$$\phi : [1, +\infty\rangle \to \mathbb{R} \text{ tal que } \phi(x) = t + x(1-t) - x^{1-t}$$

donde $t \in \langle 0, 1\rangle$(fijo)

$$\phi^{'}(x) = 1 - t - (1-t)x^{-t} = \underbrace{(1-t)}_{\geq 0}\underbrace{(1-x^{-t})}_{\geq 0}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \phi^{'}(x) \geq 0; \forall x \geq 1 \\ &\Rightarrow \quad 0 = \phi(1) \leq \phi(x) = t + x(1-t) - x^{1-t} \end{aligned}$$

Por lo tanto $x^{1-t} \leq t + x(1-t); \forall x \geq 1$

Tomando $x = \frac{b}{a} \geq 1$, la desigualdad, se sigue.

En el caso que $0 < b < a$; como $1 - t \in \langle 0, 1\rangle$. usando la parte anterior (para 1-t en vez de t) $b^{1-t}.a^t \leq b(1-t) + at$.

Ahora demostraremos la desigualdad de Young; si $a = 0$ ó $b = 0$ la desigualdad es obvia, trabajaremos en el caso $a > 0$ y $b > 0$. como $1 < p < +\infty \Rightarrow 0 < \frac{1}{p} < 1$, de la prueba anterior obtenemos:

$$a^{1/p}.b^{1-1/p} \leq \frac{a}{p} + b\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Teorema 1 (Desigualdad de Cauchy - Schwarz) *Sea X un espacio vectorial con producto interno y sean $x, y \in X$. Entonces*

$$|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\|$$

teniendo la igualdad si y sólo si x e y son linealmente dependientes.

Demost. Ver [7]

1.2. Convergencia débil y débil estrella

Definicion 1 (Convergencia débil) *Una sucesión (u_n) es un espacio normado X, converge débilmente si $\exists u \in X$ tal que para cada $f \in X^{'}$ $\quad f(u_n) \to f(u)$*

En notación moderna:

$$u_n \rightharpoonup u \Leftrightarrow \langle f, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle \quad \forall f \in X^{'}$$

Definicion 2 (Convergencia fuerte) *Una sucesión (u_n) en un espacio normado X, converge fuerte si existe $u \in X$ tal que tal que $\|u_n - u\| \to 0$*

Notación:

$$u_n \to u \text{ fuerte } \Leftrightarrow \|u_n - u\|_X \to 0$$

Definicion 3 (convergencia débil *) *Sea (u_m) una sucesión de funcionales lineales acotadas en un e. normado X diremos que:*

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \Leftrightarrow \langle u_m, w \rangle_{X', X} \to \langle u, w \rangle_{X', X} \, \forall w \in X$$

Proposicion 1 *Sea (f_n) una sucesión de $E^{'}$. Se verifica*

- *Si $f_n \to f$ fuertemente, entonces $f_n \rightharpoonup f$ en $\sigma(E^{'}, E^{''})$*
- *Si $f_n \rightharpoonup f$ en $\sigma(E^{'}, E^{''})$, $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ en $\sigma(E^{'}, E)$*

Demost. Ver [2]

1.3. Espacios de Hilbert y L^p

DEFINICION 4 (ESPACIO DE HILBERT) *Sea X un espacio vectorial con producto interno, si X es completo con respecto a la metrica inducida por el producto interno, diremos entonces que X es un espacio de Hilbert.*

Observación:en un espacio de Hilbert toda sucesión acotada posee una subsucesión débilmente convergente.

DEFINICION 5 *$\mathcal{M}$: Colección de todos los subconjuntos medibles en $\mathbb{R}^m$.*

DEFINICION 6 *$\mathcal{M}(\Omega)$: Colección de todas las funciones medibles sobre Ω.*

DEFINICION 7 (LOS ESPACIOS L^p) *Sea $\Omega \in \mathcal{M}$ y $p \geq 1$ denotaremos por $L^p(\Omega)$ al conjunto de todos las funciones $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ talque $|f|^p \in L(\Omega)$ es decir*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{M}(\Omega) : \int_\Omega |f|^p < \infty \right\}$$

Si $f \in L^p(\Omega)$ entonces denotaremos

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p}$$

Observación 1: $L^1(\Omega) = L(\Omega)$

DEFINICION 8 (ESPACIO L^∞) *Sea $\Omega \in \mathcal{M}$, decimos que la función $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ es esencialmente acotada sss $\exists C = C(f) > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ ctp Ω.*

Denotaremos por $L^\infty(\Omega)$ al conjunto de todas las $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ que son esencialmente acotadas. Si $f \in L^\infty(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= inf\left\{c > 0 : |f(x)| < c \quad ctp. \quad \Omega\right\} \\ &= sup.ess\left\{|f(x)| : x \in \Omega\right\} \end{aligned}$$

Nota 1. Si $f \in L^\infty$, entonces

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}, \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

En efecto, existe una sucesión C_n tal que $C_n \to \|f\|_{L^\infty}$ y para cada n, $|f(x)| \leq C_n$ c.t.p. en Ω. Así, $|f(x)| \leq C_n$ para todo $x \in \Omega - E_n$ con E_n de medida cero.
Se pone $E = \bigcup_n E_n$ de forma que E es de medida cero y se tiene $|f(x)| \leq C_n$ para todo n y para todo $x \in \Omega - E$. En consecuencia $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$, para todo $x \in \Omega - E$.

Notación. Sea $1 \leq p \leq \infty$; se designa por $p^{'}$ el **exponente conjugado** de p , i.e.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^{'}} = 1$$

Teorema 2 (Desigualdad de Holder) *Sean $p, q \in [1, \infty]$. conjugadas y $\Omega \in \mathcal{M}$.*

$$\textit{Si } f \in L^p(\Omega) \textit{ y } g \in L^q(\Omega) \textit{ entonces } f.g \in L^1(\Omega) \textit{ y } \|f.g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Demost.: Ver [2]

Nota 2. Es conveniente retener una consecuencia muy útil de la desigualdad de Holder: Sean $f_1, f_2, ..., f_k$ funciones tales que

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega), \quad 1 \leq i \leq k \text{ con } \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k} \leq 1$$

Entonces el producto $f = f_1 f_2 ... f_k$ pertenece a $L^p(\Omega)$ y

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \|f_1\|_{L^{p_2}} ... \|f_k\|_{L^{p_k}}$$

En particular, si $f \in L^p(\Omega) \cap Ł^q(\Omega)$ con $1 \leq p \leq q \leq \infty$, entonces $f \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ y se verifica la **desigualdad de interpolación**

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\alpha} \|f\|_{L^q}^{1-\alpha} \text{ donde } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

Corolario 1 (Desigualdad de Cauchy - Schwarz) *Sea $f, g \in L^2(\Omega)$ entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y*

$$\int_\Omega |fg| \leq \left(\int_\Omega |f|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |g|^2\right)^{1/2}$$

Demost.: Ver [2]

Teorema 3 (Desigualdad de Minkowsky) *Sean $f, g \in L^p(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$ y entonces $f + g \in L^p(\Omega)$ y*

$$\|f + g\| \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Demost.: Ver [2]

Teorema 4 *L^p es un espacio vectorial y $\|.\|_{L_p}$ es una norma para todo $1 \leq p \leq \infty$.*

Demostración: Ver [2]

Teorema 5 *L^p es un espacio de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$.*

Demostración: Ver [2]

Teorema 6 (Teorema de representación de Riez) *Sea $1 < p < \infty$ y sea $\varphi \in (L^p)^{'}$.Entonces existe $u \in L^{p^{'}}$ único tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int uf \quad \forall f \in L^p$$

Además se verifica

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$$

Demost.: Ver [2]
Nota 3. el teorema es muy importante. expresa que toda forma lineal continua sobre L^p con $1 < p < \infty$ se representa por medio de una función de $L^{p^{'}}$. La aplicación $\varphi \to u$ es un operador lineal isométrico y sobreyectivo que permite identificar el dual de L^p con $L^{p^{'}}$. En lo que sigue, se hará sistemáticamente la identificación

$$(L^p)^{'} = L^{p^{'}}$$

Teorema 7 **(Fubini)** *Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ entonces $f_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m_2})$ ctp $\mathbb{R}^{m_1}$,$f_y \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m_1})$ ctp $\mathbb{R}^{m_2}$ y*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^{m_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{m_2}} f(x,y)dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^{m_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{m_1}} f(x,y)dx \right) dy$$

Demost.: Ver [10]

1.4. Espacio de Funciones de Prueba o Test

Notaciones previas:
Dado $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ y $z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{K}^n \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C})$
definiremos:

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \\ z^\alpha &= z^{\alpha_1} z^{\alpha_2} ... z^{\alpha_n} \\ \alpha! &= \alpha_1! \alpha_2! ... \alpha_n! \end{aligned}$$

Por D^α representaremos al operador derivación de orden α dado por,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

y si $\alpha = (0, 0, ..., 0)$ se define $D^0 u = u$, $\forall u$.
Ejm.: $u : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; $n = 3$ $\alpha = (2, 1, 3) \in \mathbb{N}^3$, $|\alpha| = 2 + 1 + 3 = 6$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^6 u}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_3^3}$$

Por $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, ..., n$

Ejm.: $i = 3$, $D_3 u = \frac{\partial}{\partial x_3} u$

Si α ,$\beta \in \mathbb{N}^n$, se escribirá que $\beta \leq \alpha$ si y sólo si , $\beta_i \leq \alpha_i$; $i = 1, 2, ..., n$

Regla de Leibniz Sea $u, v : \Omega \to \mathbb{K}$ suficientemente derivables, entonces

$$D^\alpha (uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha - \beta)!} \left(D^\beta u \right) \left(D^{\alpha - \beta} v \right) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha - \beta} v$$

Observación 2: $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}$; $\alpha \geq \beta$. $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

Definicion 9 (Soporte de una función) *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio y $u : \Omega \to \mathbb{K}$ una función, se define el soporte de u por;*

$$sop(u) = \overline{\{x \in \Omega / u(x) \neq 0\}}^{\Omega}$$

Definicion 10 *Si* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ *entonces se define la función traslación ;*

$$\begin{aligned} u_{x_0} : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{K} \\ x &\to u_{x_0}(x) = u(x - x_0) \end{aligned}$$

Proposición. Sean $u, v : \Omega \to \mathbb{K}$, funciones, $\lambda \in \mathbb{K}$,$\lambda \neq 0$ entonces se tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} sop(u+v) &\subset sop(u) \cup sop(v) \\ sop(uv) &\subset sop(u) \cap sop(v) \\ sop(\lambda u) &= sop(u) \\ sop(u_{x_0}) &= x_0 + sop(u), \quad u_{x_0} \text{ función traslación} \end{aligned}$$

Sean $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se define la convolución de u y v por,

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)v(x-y)dy$$

Observación 3:

- $sop(u)$ es el menor cerrado de Ω fuera del cual $u = 0$, en el sentido siguiente:
  (a) $sop(u)$ es un cerrado de Ω y $u = 0$ en $\Omega - sop(u)$
  (b) si F es cerrado de Ω y $u = 0$ en $\Omega - F$, entonces $sop(u) \subset F$
- Si K es compacto y F es cerrado, entonces $K + F$ es cerrado.

Proposicion 2 *Si u ó v tiene soporte compacto, entonces*

$$sop(u * v) \subset sop(u) + sop(v)$$

Demost.: Ver [11]
Ejemplo de función prueba: Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definido por

$$\varphi(x) = \begin{cases} exp(\frac{-1}{1-\|x\|^2}) & \text{si } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

donde $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto se define,
$C_0^\infty(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ es el conjunto de las funciones $u : \Omega \to \mathbb{K}$ tq. sop(u) es compacto en Ω y con derivada parcial continua de todos los ordenes.
a los elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ se denomina funciones de prueba o tests.

DEFINICION 11 (SUCESIÓN REGULARIZANTE) *La sucesión* $(\rho_m) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *se dice que es una sucesión regularizante, si satisface las siguientes propiedades.*

(1) $\rho_m > 0, \quad \forall m$

(2) $sop(\rho_m) \subset \overline{B}(0, \frac{1}{m})$

(3) $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_m(x)dx = 1, \quad \forall m$

Nota 3. $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_m(x)dx = \int_{\|x\| \leq \frac{1}{m}} \rho_m(x)dx = 1$

DEFINICION 12 *Sea* $\{\varphi_\mu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ *una sucesión , diremos que,* $\varphi_{mu} \to 0$*, si*

- $\exists K$ *compacto fijo tq.* $sop(\varphi_\mu) \subset K$, $\forall \mu$
- $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi_\mu \to 0$ *uniformemente en* K

Con esta convergencia dada en $C_0^\infty(\Omega)$, definimos

$$D(\Omega) = (C_0^\infty(\Omega), \to)$$

El espacio de funciones test o de prueba con la topología límite inductivo.

DEFINICION 13 *Sea* $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, integrable a lebesgue definida en* Ω*, tal que para cada compacto* $K \subset \Omega$

$$\int_K |u(x)|dx < \infty$$

Diremos que u *es localmente integrable y escribiremos*

$$u \in L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ med. } / \, \Omega \subset \mathbb{R}^n \wedge \int_K |u(x)|dx < \infty, \forall K \subset \Omega \text{ cpto.} \right\}$$

Para $1 < p < +\infty$ se define,

$$L^p_{loc}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} / \text{ u medible }, \int_K |u(x)|^p dx < \infty, \forall K \text{ compacto } \subset \Omega \right\}$$

Observación 4: Es inmediato comprobar que:

$$L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega), \quad 1 \leq p \leq +\infty$$

y en particular: $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$; $1 \leq p \leq +\infty$ Por tanto $L^1_{loc}(\Omega)$ es uno de los matores espacios de funciones del análisis. Además $C_0(\Omega)$ y $C_0^\infty(\Omega)$ son densos en $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < +\infty$. Además $C_0(\Omega)$ y $C_0^\infty(\Omega)$ son densos en $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < +\infty$, $C_0(\mathbb{R}^n)$ y $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ son densos en $L^p(\mathbb{R}^n)$

PROPOSICION 3 (LEMA DE DUBOIS RAYMOND) *Sea* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tq.* $\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$*. entonces* $u = 0$ *c.s. en* Ω*.*

Demostración: Ver[9]

1.5. Distribuciones sobre Ω y Derivadas

Sea $T : D(\Omega) \to \mathbb{K}$ una forma lineal, diremos que:

1. T es continua (en el sentido de convergencia en $D(\Omega)$) si, $\forall (\varphi_\nu) \subset D(\Omega)$ tq. $\varphi_\nu \to 0$ entonces, $\langle T, \varphi_\nu \rangle \to 0$ en $\mathbb{R}$.

   Observación 5: $\langle T, \varphi_\nu \rangle = T(\varphi_\nu)$

2. T es una distribución sobre Ω si, T es lineal y continua en $D(\Omega)$.

Al espacio de las distribuciones se le denota por,

$$D^{'}(\Omega) = \{T : D(\Omega) \to \mathbb{R} / \text{ T es una distribución sobre } \Omega\}$$

Ejm.: Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, definamos la forma lineal $T_u : D(\Omega) \to \mathbb{K}$ definida por,

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx; \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Es fácil verificar que $T_u \in D^{'}(\Omega)$

Observación 6: Del lema de Du Bois Raymond, se tiene que para cada $u : \Omega \to \mathbb{K}$, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$; T_u está univocamente determinado por u sobre Ω, c.s., esto es la aplicaión;

$$\begin{aligned} T : L^1_{loc}(\Omega) &\to D^{'}(\Omega) \text{ es inyectiva} \\ u &\to T_u \end{aligned} \tag{1.1}$$

Es más se prueba que es una inmersión continua ,i.e, $L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D^{'}(\Omega)$.

La derivada distribucional(o derivada en el sentido de las distribuciones)
Sea $T \in D^{'}(\Omega) \wedge \alpha \in \mathbb{N}^n$, se define la derivada de T por:

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle , \forall \varphi \in D(\Omega)$$

La aplicación del operador, $D^\alpha : D^{'}(\Omega) \to D^{'}(\Omega)$ tal que $T \to D^\alpha T$ es lineal y continua en el sentido de $D^{'}(\Omega)$

Observación 7: La derivada de una función integrable en Ω, no necesariamente es en general una función localmente integrable en Ω.
Lo que motivará la definición de una clase significante de los espacios de Banach de funciones, conocidos como los espacios de Sobolev.

TEOREMA 8 *$D(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$.*

Demost. Ver [2]

1.6. El espacio de Sobolev y algunas propiedades

Sabemos que no toda distribución en Ω proviene de una función de $L^1_{loc}(\Omega)$. Ahora estamos interesados en funciones $u \in L^2(\Omega)$, tal que su derivasa en el sentido distribucional $D^\alpha u$ (que es una distribución) provenga de alguna función $u_\alpha \in L^2(\Omega)$, mas precisamente, que exista $u_\alpha \in L^2(\Omega)$ talque,

$$\langle D^\alpha u, \varphi \rangle = \langle u_\alpha, \varphi \rangle , \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

esto es,

$$(-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \varphi \rangle = \langle u_\alpha, \varphi \rangle$$

multiplicando ambos lados por $(-1)^{|\alpha|}$ resulta,

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \langle u_\alpha, \varphi \rangle$$

Ahora bien, sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$, se define un nuevo espacio denominado **espacio de Sobolev** representado por $W^{m,p}$ y definido por

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) / D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m \}$$

Observación 8:

- $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio vectorial.
- D^α u son derivadas en el sentido de las distribuciones.

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ se define la norma de u por,

$$\|u\|^p_{m,p} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx$$

Proposición. El espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ es de Banach.
Demostración:ver [9]

Observación 9:

- En el caso particular cuando $p = 2$ se tiene:

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$$

- El espacio $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar,

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \le m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in H^m(\Omega)$$

El espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$

Cuando $m = 0$, se tiene que $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ y de resultado conocido sabemos que $D(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$, mas no es verdadero que $D(\Omega)$ es denso en $W^{m,p}(\Omega)$,para $m \ge 1$. Motivado por esta razón, definiremos el espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ por

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$$

Cuando p=2 se escribe $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$.

El espacio $W^{-m,p}(\Omega)$

Sea $1 \le p < +\infty$, $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se define

$$\begin{aligned} W^{-m,p}(\Omega) &= \left(W_0^{m,p}(\Omega)\right)' \text{ dual topológico, si p=2 se tiene} \\ W^{-m,2}(\Omega) &= H_0^m(\Omega) \end{aligned}$$

1.7. Espacios de Bochner

Sea X es un espacio de Banach. Consideremos la aplicación

$$: [0, T] \to X \text{ tq. } t \to u(t)$$

extenderemos la noción de medibilidad, integrabilidad y diferenciabilidad débil.

Definicion 14 *Una función $s : [0, T] \to X$ es llamado simple si tiene la forma:*

$$s(t) = \sum_{i=1}^{m} I_{E_i}(t) u_i$$

con conjuntos medibles Lebesgue $E_i \subset [0, T]$ y $u_i \in X$

Definicion 15 *La función* $f : [0,T] \to X$ *es llamado fuertemente medible si existe funciones simples* $s_k : [0,T] \to X$ *tq.* $s_k(t) \mapsto f(t)$, *c.s. en* $[0,T]$.

Definicion 16 (Bochner integrable)

- Para una función simple $s(t) = \sum_{i=1}^{m} I_{E_i}(t)u_i$ definimos la integral

$$\int_0^T s(t)dt = \sum_{i=1}^{m} u_i\mu(E_i)$$

- diremos que $f : [0,T] \to X$ es Bochner - integrable ó integrable en el sentido de Bochner, si existe una sucesión (s_k) de funciones simples tal que

$$s_k(t) \to f(t) \text{ c.s. y}$$
$$\int_0^T \|s_k(t) - f(t)\|_X dt \to 0 \text{ cuando } k \to +\infty$$

- Si f es de Bochner - Integrable definimos

$$\int_0^T f(t)dt = lim_{k\to\infty} \int_0^T S_k(t)dt$$

Teorema 9 (Caracterización de las funciones Bochner - Integrable) *Una función fuertemente medible* $f : [0,T] \to X$ *es Bochner - Integrable si y sólo si,*

$$[0,T] \to \mathbb{R} \ tq. \ t \mapsto \|f(t)\|_X$$

es lebesgue integrable, i.e., $\int_0^T \|f(t)\|_X dt < +\infty$

En este caso se tiene:

$$\| \int_0^T f(t)dt\|_X \leq \int_0^T \|f(t)\|_X dt,$$

Además $\forall u^{'} \in X^{'}$ la función $t \mapsto \left\langle u^{'}, f(t)\right\rangle_{X',X}$ es integrable con

$$\left\langle u^{'}, \int_0^T f(t)dt \right\rangle_{X',X} = \int_0^T \left\langle u^{'}, f(t)\right\rangle_{X',X} dt$$

Nota 4: Del teorema precedente, diremos que: $u : [0,T] \to X$ es integrable en el sentido de Bochner en $[0,T]$, si u es medible y la función numérica $t \mapsto \|u(t)\|_X$ es integrable a Lebesgue en $[0,T]$.

En este caso, la integral de Bochner de u, es el vector de X,denotado por $\int_0^T u(t)dt \in X$ y caracterizado por

$$\left\langle f, \int_0^T u(t)dt \right\rangle_{X',X} = \int_0^T \langle f, u(t)\rangle_{X',X}\, dt, \quad \forall f \in X'$$

Esto motiva las siguientes definiciones de espacios de Banach a valores en espacios de Lebesgue.

DEFINICION 17 *Sea X un espacio de Banach separable.Definiremos los espacios:*

$$L^p(0,T;X) = \left\{ u : [0,T] \to X \text{ fuertemente medible } / \int_0^T \|u(t)\|_X^p < \infty \right\}$$

para $1 \leq p < \infty$. se definen en $L^p(0,T;X)$ la norma,

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}$$

En consecuencia $\left(L^p(0,T;X), \|.\|_{L^p(0,T;X)}\right)$ es un espacio de Banach.

Observación 10: cuando $p = 2$, X es un espacio de Hilbert, entonces $L^2(0,T;X)$ es un espacio de Hilbert, con producto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X\, dt$$

Observamos que $t \to (u(t), v(t))_X$ es integrable en $[0,T] \quad \forall u, v \in L^2(0,T;X)$ pues $|(u(t), v(t))|_X \leq \|u(t)\|_X \|v(t)\|_X \in L^1(0,T)$

DEFINICION 18 *Cuando $p = \infty$ se define el espacio $L^\infty(0,T;X)$ como:*

$$L^\infty(0,T;X) = \{u = [0,T] \to X \text{ fuertemente medible } / supess \{\|u(t)\|_X / t \in [0,T]\}\}$$

Se define una norma en $L^\infty(0,T;X)$ por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = supess \{\|u(t)\|_X / t \in [0,T]\}$$

$\left(L^\infty(0,T;X); \|.\|_{L^\infty(0,T;X)}\right)$ *es un espacio de Banach.*

Si $1 \leq p < \infty$, entonces el dual topológico de $L^p(0,T;X)$ se identifica con el dual topológico $L^{p'}(0,T;X')$. Se demuestra tambien que si X fuera reflexivo (resp. separable) entonces $L^p(0,T;X)$ es reflexivo (resp. separable) con esta identificación, tenemos para $f \in L^{p'}(0,T;X')$, $u \in L^p(0,T;X)$

$$\langle f,u\rangle_{L^{p'}(0,T;X'),L^p(0,T;X)}=\int_0^T\langle f(t),u(t)\rangle_{X',X}\,dt$$

Dado $u\in L^p(0,T;X)$, definimos

$$\langle T_u,\varphi\rangle=\int_0^T u(t)\varphi(t)dt,\forall\varphi\in D(0,T)$$

donde la integral es entendida como una integral de Bochner en X.Resulta de lo anterior que:

$$|\langle T_u,\varphi_\mu\rangle|\leq\int_0^T\|u(t)\|_X|\varphi_\mu(t)|dt\leq sup_{t\in[0,T]}|\varphi_\mu(t)|\int_0^T\|u(t)\|_X dt$$

De esto deducimos que si $\varphi_\mu\to 0$ en $D(0,T)$, entonces $\langle T_u,\varphi_\mu\rangle\to 0$ en $\mathbb{R}$, de modo que $T_u\in L(D(0,T);X)=D^{'}(0,T;X)$
El espacio $D^{'}(0,T;X)$ es denominado espacio de las distribuciones vectoriales con valores en X, definidas sobre $[0,T]$.

TEOREMA 10 **(Desigualdad de Poincaré)** *Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un dominio acotado en una dirección, entonces existe una constante $C_p>0$ tal que $|u|_{L^2}\leq C_p\,|\nabla u|_{L^2(\Omega)}$, $\forall u\in H_0^1(\Omega)$. La constante C_p es denominada la constante de Poincaré.*

Demostración. ver [2]
Siendo $v\in H_0^1(\Omega)$, existe una sucesión $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funciones de $D(\Omega)$ tal que $\varphi_\nu\to v$ en $H_0^1(\Omega)$,es decir,

$$\varphi_\nu\to v \text{ y } \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_i}\to\frac{\partial v}{\partial x_i}\text{ en } L^2(\Omega),\quad i=1,2,...,n.$$

Como Ω es acotado, existe $a,b\in\mathbb{R}$ tales que

$$a<projx<b,\quad\forall x\in\Omega$$

donde $projx$ es la proyección de x sobre el eje coordenado x_1, y $\varphi_\nu(a,x_2,...,x_n)=0$, $\forall\nu$. Tenemos, usando la notación $x^{'}=(x_2,...,x_n)$:

$$\varphi_\nu(x_1,x^{'})=\int_a^{x_1}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_1}(\xi,x^{'})d\xi$$

De la desigualdad de Schwarz, se sigue:

$$|\varphi_\nu(x_1,x^{'})|^2\leq(b-a)\int_a^{x_1}\left|\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_1}(\xi,x^{'})\right|^2 d\xi$$

Aplicando el Teorema de Fubini resulta:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\varphi_\nu(x)|^2 &\leq (b-a)\int_\Omega \int_a^{x_1} \left|\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_1}(\xi, x')\right|^2 d\xi dx \\ &\leq (b-a)^2 \int_\Omega \left|\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_1}(x)\right|^2 dx\end{aligned}$$

Por tanto,

$$|\varphi_\nu|_{L^2(\Omega)} \leq (b-a)\left(\sum_{i=1} \left|\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_1}(x)\right|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}$$

la desigualdad se sigue usando las convergencias anteriores.
Observación 11: como consecuencia de esta desigualdad, se considera la norma de H_0^1, esto es si $v \in H_0^1(\Omega)$, se tiene :

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} = |v|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla v|^2_{L^2(\Omega)} \geq |\nabla v|^2_{L^2(\Omega)}$$

De la desigualdad de Poincaré, se obtiene:

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq (1+c)\,|\nabla v|$$

se concluye que en $H_0^1(\Omega)$, las normas $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ y $|\nabla v|_{L^2(\Omega)}$ son equivalentes.

LEMA 3 *En U un abierto acotado de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$,sean g_μ y g funciones de $L^s(U)$ con $1 < s < +\infty$, $|g_\mu|_{L^s(U)} \leq C$ y $g_\mu \to g$ en c.t.p. en U. entonces $g_\mu \to g$ débilmente en $L^s(U)$*

Demostración. *Sea $N \in \mathbb{N}$,*

$$E_N = \{x/ \quad x \in U \ \textit{tal que} \ |g_\mu(x) - g(x)| \leq 1, \mu \geq N\}$$

Los conjuntos E_N son conjuntos medibles, crecientes sobre N y

$$m(E_N) \to m(U) \ \textit{cuando} \ N \to +\infty$$

donde $m(A)$ es la medida de A.
Así, definimos

$$\Phi_N = \left\{\Psi \in L^r(U) \ \textit{tal que} \ \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1 \ \textit{y soporte de} \ \Psi \subset E_N\right\}$$

y denotamos por:

$$\Phi = \bigcup_{N=1}^{\infty} \Phi_N, \ \textit{esto es denso en} \ L^r(U)$$

Sea $\Psi \in \Phi$ entonces existe N_0 tal que $\Psi \in \Phi_{N_0}$. Tomando $\mu \geq N_0$ tenemos que:

$$|\Psi(g_\mu - g)| \leq |\Psi| \to 0 \ c.t.p.$$

Luego el teorema de Lebesgue nos garantiza que

$$\int_U \Psi(g_\mu - g)dx \to 0 \ cuando \ \mu \to +\infty$$

Así hemos probado que

$$Si \ \Psi \in \Phi \Rightarrow \int_U \Psi(g_\mu - g)dx \to 0 \ cuando \ \mu + \infty.$$

Desde que Φ es denso en $L^r(U)$, entonces la ecuación anterior prueba el Lema.

LEMA 4 *Sea $f \in L^p(0,T;X), f_t \in L^p(0,T;X)$ con $1 \leq p \leq +\infty$. Entonces existe una función continua g en $[0,T]$ tal que $g = f$ en casi todo punto de X.*

Demostración. ver [4]

LEMA 5 *Sea H un espacio de Hilbert separable, $V \subset H$ una inclusin continua con V denso en H, $1 \leq p \leq \infty$. Si $f \in L^p(0,T;V)$ y $f_t \in L^p(0,T;H)$ entonces $f \in C([0,T],H)$ Por otro lado si $p = \infty$. entonces $f \in C_{debilmente}([0,T];V)$ (f es débilmente continua en $[0,T]$), i.e $\forall \in V^*, \langle f(t), g\rangle_{V,V^*} \to \langle f(t_0), g\rangle_{V,V^*}$ cuando $t \to t_0$,$\forall t_0 \in [0,T]$.*

Demostración. ver [5]

LEMA 6 (LIONS) *Sea (u_v) una sucesión limitada en $L^q(\Omega)$. Supongamos que $u_v \to u$ C.S. en Ω. Entonces:*
(i) $u_v \to u$ fuerte en $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < q$.
(ii) $u_v \rightharpoonup u$ débil en $L^q(\Omega)$.

TEOREMA 11 **(Rellich - Kondrachoff)** *Sea $Q = (0,T) \times \Omega$, así $H^1(Q) \to L^2(Q)$ es una inyección compacta*

Demostración. ver [4]

TEOREMA 12 **(Dunford- Pettis)** *$L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega))$ (resp.$L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$) es el dual de $L^1(0,T;H^{-1}(\Omega) + L^{4/3}(\Omega))$(resp. $L^1(0,T;L^2(\Omega))$).*

Demostración. ver [4]

TEOREMA 13 **(Compacidad de Aubin - Lions)** *Sean* $0 < p < \infty$, $i = 0, 1$ *y* $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$ *espacios de Banach reflexivos.Si* $0 < T < \infty$, *con*

$$W := \left\{ v/v \in L^{p_0}(0, T; B_0), v^{'} \in L^{p_1}(0, T; B_1)) \right\}$$

$$\|v\| = \|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v^{'}\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}$$

Entonces

(i) W *es un espacio de Banach*

(ii) $W \overset{c}{\hookrightarrow} L^{p_0}(0, T; B)$

TEOREMA 14 **Teorema de la Divergencia.** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *un dominio acotado cuya frontera* $\partial\Omega$ *es una union finita de curvas suaves. Sea* $F : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ *un campo vectorial de clase* C^1 *en* $\bar{\Omega}$. *Entonces:*

$$\int_{\overline{\Omega}} \nabla .F dxdy = \int_{\partial\Omega} F.\hat{n}ds$$

donde $\hat{n}$ *es la normal externa unitaria.*

TEOREMA 15 **(Identidades de Green.)** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *un dominio donde se cumple el teorema de la divergencia. y sea* $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. *Entonces se cumple las siguientes identidades:*

$$\int_{\overline{\Omega}} (v\triangle u + \nabla v.\nabla u)dxdy = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}ds \tag{1.2}$$

$$\int_{\overline{\Omega}} (v\triangle u - u\triangle v)dxdy = \int_{\partial\Omega} (v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n})ds \tag{1.3}$$

Demostración.
Para demostrar (1), sea $F = v\nabla u$. Entoces F es un campo vectorial de clase C^1 en $\overline{\Omega}$ y

$$\nabla .F = \nabla .(v\nabla u) = \nabla v.\nabla u + v\triangle u$$

Aplicando el teorema de la divergencia, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\Omega}} (v\triangle u + \nabla v \nabla u)dxdy &= \int_{\overline{\Omega}} \nabla .F dxdy \\ &= \int_{\partial\Omega} F.\hat{n}ds \\ &= \int_{\partial\Omega} v\nabla u.\hat{n}ds \\ &= \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}ds \end{aligned}$$

Para probar (2), basta usar (1): de hecho,

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{\Omega}}(v\triangle u - u\triangle v)dxdy &= \int_{\overline{\Omega}}(v\triangle u + \nabla v.\nabla u)dxdy - \int_{\overline{\Omega}}(u\triangle v + \nabla u\nabla v)dxdy \\
&= \int_{\overline{\Omega}} v\frac{\partial u}{\partial n}ds - \int_{\overline{\Omega}} u\frac{\partial v}{\partial n}ds
\end{aligned}$$

1.8. Inmersiones de espacios de Sobolev

Considere los espacios de Hilbert V y H, siendo V con norma $\|.\|_V$ y H con norma $|.|_H$. supongase que $V \subset H$ o sea

$$\tau : V \to H$$

una inyección canónica de V en H, que a cada $v \in V$, hace corresponder τv como un elemento de H. Se dice simplemente que el operador lineal τ es un operador de inmersión o una inmersión τ de V en H.

Definicion 19 *Se dice que una inmersión $\tau : V \to H$ es continua, cuando existe una constante $k > 0$, tal que*

$$|v|_H \leq k\,\|v\|_V \quad \forall v \in V$$

Un ejemplo simple es el caso $V = H_0^1(\Omega)$ y $H = L^2(\Omega)$ o $V = H^1(\Omega)$ y $H = L^2(\Omega)$.

Definicion 20 *Se dice que que una inmersión $\tau : V \to H$ es compacta, cuando una imagen de los conjuntos acotados de V, por τ, son conjuntos relativamente compactos de H, esto es, conjuntos cuya cerradura es compacto en H.*

Definicion 21 *Sea m un número natural y Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$,se denomina espacios de Sobolev de ordem m, representado por $H^m(\Omega)$,a los espacios de funciones reales v en Ω tales que $v \in L^2(\Omega)$ y $D^\alpha v \in L^2(\Omega)$, para todo $|\alpha| \leq m$. Las derivadas D^α, evidentemente, en el sentido de las distribuciones. se define en $H^m(\Omega)$ o producto escalar*

$$((u,v)) = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v dx$$

Para todo $u, v \in H^m(\Omega)$. A norma inducida, por ese producto escalar, es dada por:

$$\|v\|^2 = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega (D^\alpha)^2 dx$$

Cuando hubiera necesidad, se escribirá $((u,v))_{H^m(\Omega)}$ y $\|.\|_{H^m(\Omega)}$.

TEOREMA 16 *$H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable, inmerso en un producto cartesiano de espacios $L^2(\Omega)$. $H^m(\Omega)$ está continuamente inmerso en $L^2(\Omega)$.*

Demostración: Ver [12]

TEOREMA 17 **(Inmersiónes de Sobolev)** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con frontera de clase C^1 ó $\mathbb{R}^n_+$, $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < +\infty$. Si $R = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$ entonces valen los siguientes enunciados con inmersiones continuas:*

- *Si $R > 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, donde $q = \frac{1}{R}$,*
- *Si $R > 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, donde $q \in [p, +\infty)$*
- *Si $R > 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$*

Demostración. ver [1] y [2]

LEMA 7 *Sea X un espacio de Banach cuyo espacio dual es denotado por X'. Si $u, g \in L^1(0, T; X)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *u es c.s. igual a la primitiva de g, $\quad u(t) = \xi + \int_0^t g(s)ds$,$\xi \in X$, independiente de t.*
- *Para cada $\varphi \in D(0, T)$*

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = -\int_0^T g(t)\varphi(t)dt \text{ en } X$$

- *Para cada $x' \in X$*

$$\frac{d}{dt}(u(t), x') = (g(t), x')$$

  en el sentido de las distribuciones sobre $(0, T)$.

Observación:

$$a : H_0^1 \times H_0^1 \to \mathbb{R}$$

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

$$a(u; v) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

La forma bilineal, tambien llamado forma de Dirichlet
Observe que: $\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = a(u; u)$

TEOREMA 18 (ALOUGLU - BOURBAKI) *Sea E un espacio normado separable y (u_m) una sucesión acotada en $E^{'}$, entonces existe una subsucesión (u_k) de (u_m) y $u \in E^{'}/u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u$ en $E^{'}$*

PROPOSICION 4 *Sean X e Y dos espacios de Banach talque $X \hookrightarrow Y$ (i.e $X \subset Y$ con infección continua), con inmersión continu densa, entonces las siguientes propiedades son validas.*

- *$Y^{'} \hookrightarrow X^{'}$, donde la inmersión es definida por:*

$$\langle f, x \rangle_{X',X} = \langle f, x \rangle_{Y',Y} \quad \forall x \in X \ \ y \ f \in Y^{'}$$

- *Si X es reflexivo, entonces la inmersión es $Y^{'} \hookrightarrow X^{'}$ es densa.*

Demost. Ver [2]

1.9. Condiciones de Carathéodory

DEFINICION 22 . *Sea $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un subconjunto cualquiera. decimos que $f : D \to \mathbb{R}^n$ cumple las condiciones de Carathédory en D si $f(t,x)$ es medible en t para cada x fijo, continua en x para casi todo t fijo y para cada subconjunto compacto $K \subseteq D$ existe una función $m_K \in L^1(\mathbb{R})$ tal que:*

$$\|f(t,x)\| \leq m_K(t) \qquad \forall (t,x) \in K$$

Decimos que f cumple las condiciones de Caratheodory gobalmente si cumple las condiciones de Caratheodory y además $m_K$puede escogerse independientemente de K; esto es, existe $m \in L^1(\mathbb{R})$ tal que:

$$\|f(t,x)\| \leq m(t) \qquad \forall (t,x) \in D$$

Observación 12:*Normalmente denotaremos las variables de f como $f = f(t,x)$ con $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, de forma que cuando decimos "medible en t para cada x fijo" o " continua en x para casi todo t fijo" queremos decir, respectivamente, que las funciones*

- $t \to f(t,x) \quad$ *dado* $\quad x \in \mathbb{R}^n \quad$ *fijo*
- $x \to f(t,x) \quad$ *dado* $\quad t \in \mathbb{R} \quad$ *fijo*

cumple la propiedad que se enuncia.

Teorema 19 **(Carathéodory - Existencia global)**.
Sea I un intervalo real no trivial y $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
Si f satisface las condiciones de Carathéodory globalmente en $I \times \mathbb{R}^n$, entonces para cualquier condición inicial $x(t_0) = x_0$ con $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe una solución de:

$$\begin{aligned} x^{'} &= f(t,x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

Demost.: Ver [13]

Corolario 2 *Sea $\Omega = [0,T] \times \Gamma$, donde $0 < T < \infty$ y $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq b\}$ para algún $b > 0$, y sea f una función que satisface las condiciones de Caratheodory. Sea $\varphi(t)$ una soución de*

$$\begin{aligned} x^{'} &= f(t,x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

Supongamos que en cualquier intervalo I donde $\varphi(t)$ está definida, se tenga $|\varphi(t)| \leq G$, para todo $t \in I$, G independiente de I y $G < b$. Entonces φ tiene una prolongación en $[0,T]$.

Capítulo 2

Problema hiperbólico no lineal

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ suficientemente regular y sea $Q = \Omega \times \langle 0; T \rangle$ $(T > 0)$ el cilindro, con frontera lateral $\Sigma = \Gamma \times \langle 0; T \rangle$ y $\delta > 0$;trataremos el problema hiperbólico no lineal con término disipativo friccional y condiciones iniciales de Dirichlet:

$$(2{,}1) \begin{cases} u_{tt}(x;t) - \triangle u(x,t) + u^3(x;t) + \delta u_t = f(x;t) & \text{en Q} \\ u(x;t) = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ u(x;0) = u_0(x) \quad \wedge \quad u_t(x;0) = u_1(x) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

Se define la solución débil del problema planteado (2.1) a la función $u : Q \to \mathbb{R}$ talque:

- $u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap \text{Ł}^4(\Omega)) \quad \wedge \quad u' \in L^\infty(0,T; \text{Ł}^2(\Omega))$
- $\frac{d}{dt}(u_t, v) + a(u,v) + (u^3, v) + (\delta u_t, v) = (f,v); \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$ y se verifica la igualdad en el sentido de $D'(0,T)$.

Probaremos la existencia y unicidad de la solución débil al problema (2.1);

Teorema 1 *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado con frontera Γ bastante regular,dados $f \in L^2(0,T; L^2(\Omega)) = L^2(Q)$, $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$ y $u_1 \in L^2(\Omega)$, entonces existe una única solución débil $u : Q \to \mathbb{R}$ satisfaciendo:*

(2.2) $u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap \text{Ł}^4(\Omega)) \quad \wedge \quad u' \in L^\infty(0,T; \text{Ł}^2(\Omega))$

(2.3) $\frac{d}{dt}(u_t, v) + a(u,v) + (u^3, v) + (\delta u_t, v) = (f,v); \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$ *en el sentido de* $D'(0,T)$.

2.1. Existencia de solución débil

Demostración:Existencia
(Método Faedo Galerkin) Sea $(w_j)_{j\geq 1}$, una base Hilbertiana de $H_0^1(\Omega)\cap L^4(\Omega)$, base que siempre podemos encontrar desde que $H_0^1(\Omega)\cap L^4(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable (es decir posee una base densa y numerable). por el proceso de ortonormalización de **Gram -Schmidt**, podemos considerar $(w_j)_{j\geq 1}$ base ortonormal en $L^2(\Omega)$.Entonces el conjunto $(w_j)_{j\geq 1}$ satisface lo siguiente:

- Todo subconjunto finito de $(w_j)_{j\geq 1}$, es un conjunto linealmente independiente.
- El conjunto de las combinaciones lineales finitas de $(w_j)_{j\geq 1}$; es denso en $H_0^1(\Omega)\cap L^4(\Omega)$.
- $(w_j, w_i) = 0\ \forall\ i \neq j$ y $(w_j, w_i) = 1$ si $i = j$.

Problema aproximado. Consideremos el subespacio finito dimensional generado por los m primeros vectores de $(w_j)_{j\geq 1}$, $V_m = [w_1; w_2; ...; w_m]$

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j \in V_m \qquad donde \quad g_{jm} \in C^2\left[0, T\right] \quad \text{y} \quad w_j \in V_m, \forall m \in \mathbb{N} \quad (2{,}4)$$

Para $u_m \in V_m$ en la ecuación de (2.1), y multiplicando por $w_j \in V_m$ se tiene el problema aproximado (P.A), para $j = 1, 2, ..., m$.

$$(P.A)\begin{cases} (u_m^{''}, w_j) + a(u_m, w_j) + (u_m^3, w_j) + (\delta u_m^{'}, w_j) = (f, w_j) & \text{en Q} \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 & \text{en } H_0^1(\Omega)\cap L^4(\Omega) \\ u_m^{'}(0) = u_{1m} \to u_1 & \text{en } L^2(\Omega) \end{cases}$$

Derivando (2.4) tenemos:

$$u_m^{'}(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}^{'}(t)w_j \qquad \text{y} \qquad u_m^{''}(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}^{''}(t)w_j$$

Reemplazando en (P.A) tenemos:

$$\begin{aligned} (\sum_{i=1}^{m} g_{im}^{''}(t)w_i, w_j) + a(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)w_i, w_j) + (u_m^3, w_j) + \delta(\sum_{i=1}^{m} g_{im}^{'}(t)w_i, w_j) &= (f, w_j) \\ \sum_{i=1}^{m} g_{im}^{''}(t)(w_i, w_j) + \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)a(w_i, w_j) + (u_m^3, w_j) + \delta\sum_{i=1}^{m} g_{im}^{'}(t)(w_i, w_j) &= (f, w_j) \end{aligned}$$

Como $\{w_j\}_{j\geq 1}$ es base ortonormal, en $L^2(\Omega)$ se tiene:

$$g''_{jm}(t) + \sum_{i=1}^{m} g_{im}a(w_i, w_j) + (u_m^3, w_j) + \delta g'_{im}(t) = (f, w_j) \qquad \forall j = 1; \ldots m$$

Se definen:

$$\begin{array}{rcl} g_m(t) & = & [g_{1m}(t), \ldots, g_{mm}(t)]^t_{m\times 1} \\ A_m & = & [a(w_i, w_j)]_{m\times m} \\ F_m(t) & = & [(f, w_1), \ldots, (f, w_m)]^t_{m\times 1} \\ H(g_m(t)) & = & [(u_m^3(t), w_1), \ldots; (u_m^3(t), w_m)]^t_{m\times 1} \end{array} \tag{2.5}$$

Obteniendose asi:

$$g''_m(t) + A_m g_m(t) + H(g_m(t)) + \delta g'_m(t) = F_m(t)$$

un sistema equivalente a (P.A).

Ahora haciendo $z_m(t) = [g_m(t), g'_m(t)]^t_{2m\times 1}$ se tiene:

$$\begin{array}{rcl} z'_m(t) & = & \begin{bmatrix} g'_m(t) \\ g''_m(t) \end{bmatrix} \\ & = & \begin{bmatrix} g'_m(t) \\ F_m(t) - A_m g_m(t) - H(g_m(t)) - \delta g'_m(t) \end{bmatrix} \\ & = & \begin{bmatrix} g'_m(t) \\ -A_m g_m(t) - \delta g'_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -H(g_m(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F_m(t) \end{bmatrix} \\ & = & \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -A_m & -\delta I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_m(t) \\ g'_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -H(g_m(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F_m(t) \end{bmatrix} \end{array} \tag{2.6}$$

Observación 1: Se define

$$\begin{array}{rcl} \pi_m : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m & \rightarrow & \mathbb{R}^m \text{ proyección de las m - primeras coordenadas} \\ (x; y) & \mapsto & x \end{array}$$

tenemos:

$$\begin{array}{rcl} u_m(t) & = & \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j = g_m.[w_1; w_2; ...; w_m]^t \\ & = & g_m.[w_1; w_2; ...; w_m]^t \\ & = & \pi_m(z_m(t)).[w_1; w_2; ...; w_m]^t \end{array}$$

y

$$H(g_m(t)) = H(\pi_m(z_m(t)))$$

Sean:

$$\begin{aligned}
B_m &= \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -A_m & -\delta I_m \end{bmatrix} \\
C_m(z_m) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -H(\pi_m(z_m(t))) \end{bmatrix} \\
D_m(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ F_m(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Reemplazando en (2.6) tenemos la E.D.O de primer orden

$$z_m^{'}(t) = B_m z_m(t) + C_m(z_m(t)) + D_m(t)$$

estariamos ante una E.D.O de este tipo:

$$z_m^{'} = G(z_m, t) \qquad (2,7)$$

donde: $G(z_m, t) = B_m z_m + C_m(z_m) + D_m(t)$

para dotar de adecuados datos iniciales al problema (2.7), tenemos en cuenta que el conjunto $\{w_j\}_{j\geq 1}$ es una base de $H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$.

entonces dado $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$; existe una sucesión $(u_{0m}) \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} V_m$ tal que $u_{0m} \to u_0$ en $H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$.

Luego $u_m(0) = \sum\limits_{i=1}^{m} g_{im}(0) w_i = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{im} w_i = u_{0m}$
entonces podemos hacer:

$$g_m(0) = (\alpha_{1m}, \dots, \alpha_{mm}) \in \mathbb{R}^m$$

Análogamente existe una sucesión $(u_{1m}) \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} V_m$ talque $u_{1m} \to u_1$ en $L^2(\Omega)$

Luego $u_m^{'}(0) = \sum\limits_{i=1}^{m} g_{im}^{'}(0) w_i = \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_{im} w_i = u_{1m}$

entonces podemos hacer:

$$g_m^{'}(0) = (\beta_{1m}, \ldots, \beta_{mm}) \in \mathbb{R}^m$$

y finalmente hacer $z_m(0) = z_{0m} = [g_m(0), g_m^{'}(0)]^t \in \mathbb{R}^{2m}$ obteniendose así el problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} z_m^{'} &= G(z_m, t) \\ z_m(0) &= z_{0m} \end{aligned}$$

Ahora para aplicar el teorema de Caratheodory sobre existencia de la solución local para el problema de Cauchy, debemos demostrar que cumple con las condiciones de Caratheodory, es decir:

$$t \longrightarrow G(z_m, t) \in L^1(0, T) \quad \text{para cada } z_m \text{ fijo} \tag{2.8}$$
$$z_m \longrightarrow G(z_m, t) \quad \text{es continua, para cada t fijo.} \tag{2.9}$$

Observación 2: Como f es medible y $(\quad, w_j)$ es continuo entonces (f, w_j) es medible.
Prueba de (2.8)
tenemos que:

$$G(z_m, t) = B_m z_m + C_m(z_m) + D_m(t)$$

Entonces para cada z_m fijo , los dos primeros términos son constantes y el tercer término tiene componentes:

$$(f(t), w_j)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x,t) w_j(x) dx \qquad w_j \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

entonces

$$\begin{aligned} \left|(f(t), w_j)_{L^2(\Omega)}\right| &\leq |f(t)|_{L^2(\Omega)} |w_j|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{2} |f(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} |w_j|^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Integrando de 0 a T tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^T |(f(t), w_j)|_{L^2(\Omega)} dt &\leq \frac{1}{2}\int_0^T |f(t)|^2_{L^2(\Omega)} dt + \frac{1}{2}\int_0^T |w_j|^2_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^T \left(\int_\Omega |f(x,t)|^2 dx\right) dt + \frac{1}{2}\int_0^T |w_j|^2 dt \\ &\leq \frac{1}{2}\int_Q |f(x,t)|^2 dxdt + \frac{T}{2} \end{aligned}$$

ahora como $f \in L^2(Q)$ y $w_j \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ entonces $(f(t), w_j) \in L^1(0,T)$ y de aquí podemos concluir que $G(z_m, t) \in L^1(0,T)$.

Prueba de (2.9)
Por otro lado para cada t fijo, en $G(z_m, t) = B_m z_m + C_m(z_m) + D_m(t)$ el último término es constante y el primer término es lineal continuo. El segundo término es no lineal y debemos probar que:

$$C_m(z_m) = [0, -H(\pi_m(z_m))]^t \quad \text{sea continua}$$

donde $H(\pi_m(z_m)) = [(u_m^3, w_1); \ldots ; (u_m^3, w_m)]^t$
o el equivalente probar cada componente es continua,es decir debemos probar que la aplicación:

$$u \longrightarrow (u^3, w_j) \quad \text{es continua } \forall j = 1, 2, \ldots, m$$

Lo que es equivalente a demostrar que:

$$u_k \longrightarrow u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{entonces} \quad (u_k^3, v) \longrightarrow (u^3, v); v \in L^2(\Omega)$$

En efecto, desde que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es continua y compacta entonces:

$$u_m \longrightarrow u \quad \text{es fuerte en } L^2(\Omega)$$

asimismo, (u_m^3) es acotada en $L^2(\Omega)$, desde que $H_0^1 \hookrightarrow L^6$ para $n = 3$; tenemos:

$$\left|u_m^3\right|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left|u_m^3(x)\right|^2\right)^{1/2} = \left(\int_\Omega |u_m(x)|^6\right)^{1/2} = |u_m|_{L^6(\Omega)}^3 \leq C \|u_m\|^3 \leq C_1$$

Ademas:

$$u_m(x) \longrightarrow u(x); x \in \Omega \quad \text{lo que implica que:} \quad u_m^3(x) \longrightarrow u^3(x); \quad x \in \Omega$$

podemos aplicar el **Lema de Lions** y probar que:

$$u_m^3 \rightharpoonup u^3 \quad \text{débil en} \quad L^2(\Omega)$$

Recuerde que: $(L^2(\Omega))' = L^2(\Omega)$
Luego de la convergencia débil deducimos que:

$$(u_m^3, v) \longrightarrow (u^3, v) \quad \forall v \in L^2(\Omega)$$

Por lo tanto por el Teorema de Caratheodory tenemos que: existe una solución local del problema en un intervalo $[0, t_m)$ con $t_m < T$ obtenienose as las funciones g_m y por consiguiente las funciones u_m.

Luego el sistema posee solución local u_m en el intervalo $[0, t_m)$
El prolongamiento de estas soluciones aproximadas al intervalo $[0, T)$, como de su convergencia se obtiene or medio de las estimativas apriori.
Ahora lo que haremos es extender la solución al intervalo $[0, T[$.

ESTIMACIONES APRIORI
De (P.A), tenemos:

$$(u_m^{''}, w_j) + a(u_m, w_j) + (u_m^3, w_j) + (\delta u_m^{'}, w_j) = (f, w_j) \qquad j = 1, \ldots, m$$

multiplicando el sistema aproximado por $g_{jm}^{'}(t)$ y sumando en j, obtenemos:

$$\begin{aligned}
(u_m^{''}, g_{jm}^{'} w_j) + a(u_m, g_{jm}^{'} w_j) + (u_m^3, g_{jm}^{'} w_j) + (\delta u_m^{'}, g_{jm}^{'} w_j) &= (f, g_{jm}^{'} w_j) \\
\sum_{j=1}^{m}(u_m^{''}, g_{jm}^{'} w_j) + \sum_{j=1}^{m} a(u_m, g_{jm}^{'} w_j) + \sum_{j=1}^{m}(u_m^3, g_{jm}^{'} w_j) + \sum_{j=1}^{m}(\delta u_m^{'}, g_{jm}^{'} w_j) &= \sum_{j=1}^{m}(f, g_{jm}^{'} w_j) \\
(u_m^{''}, u_m^{'}) + a(u_m, u_m^{'}) + (u_m^3; u_m^{'}) + \delta(u_m^{'}, u_m^{'}) &= (f, u_m^{'}) \; (2.10)
\end{aligned}$$

Observación 3:

$$a(u, v) = (- \triangle u, v) = (\nabla u, \nabla v) = \sum_{i=1} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

Luego en (2.10):

$$(u_m^{''}, u_m^{'}) + (\nabla u_m, \nabla u_m^{'}) + (u_m^3; u_m^{'}) + \delta(u_m^{'}, u_m^{'}) = (f, u_m^{'})$$

$$\int_\Omega u_m^{''}.u_m^{'} dx + \int_\Omega \nabla u_m.\nabla u_m^{'} dx + \int_\Omega u_m^3.u_m^{'} dx + \delta \int_\Omega u_m^{'}.u_m^{'} dx = (f, u_m^{'})$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_m^{'}|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx + \int_\Omega u_m^3.u_m^{'} dx + \delta \int_\Omega |u_m^{'}|^2 dx &= (f, u_m^{'}) \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_m^{'}|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_m^4 dx + \delta \int_\Omega |u_m^{'}|^2 dx &= (f, u_m^{'}) \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_m^{'}|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}|u_m|_{L^4(\Omega)}^4 + \delta |u_m^{'}|_{L^2(\Omega)}^2 &= (f, u_m^{'}) \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m^{'}|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}|u_m|_{L^4(\Omega)}^4 + \delta |u_m^{'}|_{L^2(\Omega)}^2 &= (f, u_m^{'})
\end{aligned}$$

Integrando de 0 a t; $\quad (0 < t < t_m) \quad$ tenemos:

$$\frac{1}{2}(|u_m^{'}(t)|^2-|u_m^{'}(0)|^2)+\frac{1}{2}(\|u_m(t)\|^2-\|u_m(0)\|^2)+\frac{1}{4}(|u_m(t)|_4^4-|u_m(0)|_4^4)+\delta\int_0^t |u_m^{'}|_2^2 ds = \int_0^t (f,u_m^{'})ds$$

Observación 4: $\|v\| = \sqrt{a(v,v)}$, $\|.\|$ es una norma en $H_0^1(\Omega)$, además $\|.\| \sim |.|_{H^1(\Omega)}$ por la desigualdad de Poincaré.

$$\begin{aligned}
|u_m'(t)|^2+\|u_m(t)\|^2+\frac{1}{2}|u_m(t)|_4^4+2\delta\int_0^t |u_m^{'}(s)|_2^2 ds &= |u_{1m}|^2+\|u_{0m}\|^2+\frac{1}{2}|u_{0m}|_4^4+2\int_0^t (f,u_m^{'})ds \\
&\le |u_{1m}|^2+\|u_{0m}\|^2+\frac{1}{2}|u_{0m}|_4^4+\int_0^t |f|_2^2 ds \\
&\quad +\int_0^t |u_m^{'}(s)|_2^2 ds \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Como se tienen las inmersiones para $n=3$
$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$; entonces $\|u\|_{L^4} \le c\,\|u\|_{H_0^1}$; luego $\frac{1}{2}\|u_{0m}\|_{L^4}^4 \le \frac{c}{2}\|u_{0m}\|_{H_0^1}^4$ y desde que $f\in L^2(Q), (u_{1m})$ acotado en $L^2(\Omega)$ y (u_{0m}) acotado en H_0^1 podemos tomar un K tal que:

$$\int_0^T |f|_2^2 dt+|u_{1m}|_{L^2(\Omega)}^2+\|u_{0m}\|^2+\frac{c}{2}\|u_{0m}\|_{H_0^1}^4 \le K; \qquad \forall m \qquad (2,12)$$

luego; mayorando por la derecha a (2.11) con (2.12) se tiene:

$$|u_m^{'}(t)|^2 \le |u_{1m}|^2+\|u_{0m}\|^2+\frac{1}{2}|u_{0m}|_4^4+\int_0^T |f|_2^2 dt+\int_0^t |u_m^{'}|_2^2 ds \le K+\int_0^t |u_m^{'}(s)|_2^2 ds$$

$$|u_m^{'}(t)|^2 \le K+\int_0^t |u_m^{'}(s)|_2^2 ds \qquad (2,13)$$

Aplicando la desigualdad de **Gronwall** obtenemos:

$$|u_m^{'}(t)|_2^2 \le Ke^t \quad \forall t\in[0,t_m)$$

integrando de 0 a t

$$\int_0^t |u_m^{'}(s)|_2^2 ds \le \int_0^t Ke^s ds \le \int_0^T Ke^s ds = K(e^T-1)=C \qquad (2,14)$$

Reemplazando (2.14) en (2.13) tenemos:

$$|u_m'(t)|_2^2 \leq C; \quad \forall t \in [0, t_m)$$

Por el teorema de prolongación de las EDO's, la solución se prolonga hasta $t_m = T$

PASAJE A LIMITE

Observación 5: De (2.12)-(2.14) en (2.13) y teniendo que el término, $2\delta \int_0^t |u_m'(s)|_2^2 ds > 0$ mayorando por la derecha obtenemos:

$$|u_m'(t)|_2^2 + \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}|u_m(t)|_4^4 \leq C \qquad (2,15)$$

tenemos entonces:

(2.16) (u_m) es acotada en $L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega))$

(2.17) (u_m) es acotada en $L^\infty(0, T, L^4(\Omega))$

De (2.16) y (2.17) se tiene que (u_m) es acotada en $L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega))$

(2.18) (u_m') es acotada en $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$

Usando el **teorema de Dunford - Pettis**,

$$\begin{aligned} L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)) &= \left[L^1(0, T; H^{-1}(\Omega) + L^{4/3}(\Omega))\right]' \\ L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) &= \left[L^1(0, T; L^2(\Omega))\right]' \end{aligned}$$

De (2.16),(2.17) y (2.18).
podemos extraer de (u_m) una subsucesión (u_μ) tal que:

$$u_\mu \stackrel{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{en} \quad L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)) \qquad (2,19)$$

podemos extraer de (u_m') una subsucesión (u_μ') tal que:

$$u_\mu' \stackrel{*}{\rightharpoonup} X \quad \text{en} \quad L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow D'(0, T; L^2(\Omega)) \qquad (2,20)$$

esto es

$$u_\mu' \rightharpoonup X \quad \text{débil en } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ y por tanto en } D'(0, T; L^2(\Omega)) \qquad (2,21)$$

de (2.19)

$$\int_0^T \langle u_\mu(t), g(t)\rangle\, dt \to \int_0^T \langle u(t), g(t)\rangle\, dt, \quad \forall g \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega) + L^{4/3}(\Omega)) \qquad (2,22)$$

y en particular para $g \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, Luego;

$$u_\mu \rightharpoonup u \quad \text{débil en} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)) \quad \text{y por tanto en} \quad D^{'}(0,T;L^2(\Omega)) \quad (2,23)$$

luego; de (2.21) y de lo anterior:

$$\left.\begin{array}{ll} u_\mu^{'} \rightharpoonup u^{'} & \text{en } D^{'}(0,T;L^2(\Omega)) \\ u_m^{'} \rightharpoonup X & \text{en } D^{'}(0,T;L^2(\Omega)) \end{array}\right\} \Rightarrow X = u^{'}$$

y por tanto se tiene que,

$$u_\mu^{'} \overset{*}{\rightharpoonup} u^{'} \quad \text{en} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \qquad (2,24)$$

es decir:

$$\int_0^T (u_\mu^{'}(t), g(t)) \to \int_0^T (u^{'}(t), g(t))dt, \quad \forall g \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$$

Análisis del término no lineal
Aplicando el teorema de Aubin-Lions con $B_0 = H_0^1(\Omega)$, $B = B_1 = L^2(\Omega)$ y $p_0 = 2 = p_1$, resulta que existe una subsucesión de (u_m), denotada de la misma forma, tal que:

$$u_m \to u \quad \text{fuerte en} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q) \qquad (2,25)$$

y pasando a una subsucesión , si es necesario, podemos suponer de (2.25), que:

$$u_m \to u \quad \text{C.S en Q} \qquad (2,26)$$

y por tanto

$$u_m^3 \to u^3 \quad \text{C.S. en Q} \qquad (2,27)$$

Observación 6: (u_m^3) es limitado en $L^{4/3}(Q)$.
En efecto, como $(H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega))$,entonces,

$$\int_Q |u_m^3(x,t)|^{4/3} dxdt = \int_Q |u_m(x,t)|^4 dxdt \leq C_p \int_0^T \|u_m(t)\|_{H_o^1(\Omega)}^4 \leq C$$

Entonces,de (2.27),el precedente y el lema 3 tenemos

$$u_m^3 \rightharpoonup u^3 \quad \text{débil en} \quad L^{4/3}(Q) = [L^4(Q)]^{'}$$

es decir,

$$\int_Q u_m^3 w dxdt \to \int_Q u^3 w dxdt, \quad \forall w \in L^4(Q) = L^4(0,T;L^4(\Omega))$$

En particular, tomando $w = v\theta; \quad \theta \in D(0,T), v \in H_0^1(\Omega)$ se tiene:

$$\int_0^T \left(\int_\Omega u_m^3 v dx\right)\theta dt \to \int_0^T \left(\int_\Omega u^3 v dx\right)\theta dt$$

esto es,

$$\left(u_m^3, v\right) \to \left(u^3, v\right) \quad \text{en} \quad D^{'}(0,T); \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad (2{,}28)$$

de (2.22) particularizando para $g(t) \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ se tiene:

$$\int_0^T ((u_m(t), g(t)))dt \to \int_0^T ((u(t), g(t)))dt \quad \forall g \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$$

Tomando $g = \theta v$, $\theta \in L^1(0,T)$, $v \in H_0^1(\Omega)$ se tiene:

$$\int_0^T ((u_m(t), v))\theta dt \to \int_0^T ((u(t), v))\theta dt$$

De donde

$$a(u_m(t), v) \to a(u(t), v) \quad \text{en el sentido de } L^1(0,T), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega) \qquad (2{,}29)$$

y por tanto se tiene la convergencia en $D^{'}(0,T), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$

$$(u_\mu^{''}, w_j) + a(u_\mu, w_j) + (u_\mu^3, w_j) + (\delta u_\mu^{'}, w_j) = (f, w_j)$$

Finalmente de (2.29);(2.28);(2.27)y (2.26), se tiene:

$$\begin{aligned}
a(u_\mu, w_j) &\overset{*}{\rightharpoonup} a(u, w_j) \text{ en } L^\infty(0,T) \\
(u_\mu^{'}, w_j) &\overset{*}{\rightharpoonup} (u^{'}, w_j) \text{ en } L^\infty(0,T) \\
(u_\mu^{''}, w_j) = \frac{d}{dt}(u_\mu^{'}, w_j) &\overset{*}{\rightharpoonup} \frac{d}{dt}(u^{'}, w_j) = (u^{''}, w_j) \text{ en } D^{'}(0,T) \\
(u_\mu^3, w_j) &\overset{*}{\rightharpoonup} (u^3, w_j) \text{ en } L^\infty(0,T)
\end{aligned}$$

luego haciendo $\mu \to \infty$; se tiene:

$$(u^{''}, w_j) + a(u, w_j) + (u^3, w_j) + (\delta u^{'}, w_j) = (f, w_j)$$

luego por la densidad de la base $\{w_1, \ldots\}$ tenemos

$$(u^{''}, w) + a(u, w) + (u^3, w) + (\delta u^{'}, w) = (f, w), \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$$

Así u satisface la ecuación:

$$u_{tt} - \triangle u + u^3 + \delta u_t = f \quad en \quad D^{'}(0, T, H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega))$$

VERIFICACION DE LAS CONDICIONES INICIALES

Ahora probaremos que: $\quad u(0) = u_0$ y $u^{'}(0) = u_1$

Sea $\theta \in C^1([0, T]; \mathbb{R})$ con $\theta(T) = 0$ y $\theta(0) = 1$ y $v \in L^2(\Omega)$ de la convergencia (2.24) resulta

$$\int_0^T (u_m^{'}, \theta v)dt \to \int_0^T (u^{'}, \theta v)dt$$

se tiene integrando por partes y notando que $u \in C^o([0, T]; L^2(\Omega))$

$$-(u_m(0), v) - \int_0^T (u_m, \theta^{'} v)dt \to -(u(0), v) - \int_0^T (u, \theta^{'} v)dt \qquad \text{(i)}$$

Recuerde que $(u_m(0))$ converge para u_0 fuerte en $H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$ luego fuerte en $L^2(\Omega)$, consecuentemente débil en $L^2(\Omega)$.

Además de la convergencia:

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \qquad \text{en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

se tiene:

$$-(u_m(0), v) - \int_0^T (u_m, \theta^{'} v)dt \to -(u_0, v) - \int_0^T (u, \theta^{'} v)dt \qquad \text{(ii)}$$

De la unicidad de los límites de (i) y (ii);se sigue que:

$$(u(0), v) = (u_0, v) \quad \forall v \in L^2(\Omega)$$

$$\Rightarrow u(0) = u_0$$

para calcular $u'(0)$, se retorna al P.A

$$(u''_m(t),v)+a(u_m(t),v)+(u^3_m,v)+\delta(u'_m,v)=(f(t),v) \quad \forall v\in H^1_0(\Omega)\cap L^4(\Omega)$$

Sea $\theta\in C^1([0,T];\mathbb{R})$, $\theta(0)=1$, $\theta(T)=0$, multipliquese el P.A por θ, integrese por partes para obtenerse:

$$-(u'_m(0),v)-\int_0^T(u'_m,\theta' v)dt+\int_0^T a(u_m,\theta v)dt+\int_0^T(u^3_m,\theta v)dt+\delta\int_0^T(u'_m,\theta v)dt=\int_0^T(f,\theta v)dt$$

$\forall v\in H^1_0(\Omega)\cap L^4(\Omega)$
Tomando límite $m\to\infty$

$$-(u_1,v)-\int_0^T(u',\theta' v)dt+\int_0^T a(u,\theta v)dt+\int_0^T(u^3,\theta v)dt+\delta\int_0^T(u',\theta v)dt=\int_0^T(f,\theta v)dt \qquad (iii)$$

Ahora de la ecuación:

$$(u'',w)+a(u,w)+(u^3,w)+(\delta u',w)=(f,w), \quad \forall w\in H^1_0(\Omega)\cap L^4(\Omega)$$

Se obtiene multiplicando por θ e integrando de 0 a T

$$\int_0^T(u'',\theta v)dt+\int_0^T a(u(t),\theta v)dt+\int_0^T(u^3,\theta v)dt+\delta\int_0^T(u',\theta v)dt=\int_0^T(f(t),\theta v)dt$$

$\forall v\in H^1_0(\Omega)\cap L^4(\Omega)$

Integrando por partes

$$-(u'(0),v)-\int_0^T(u',\theta' v)dt+\int_0^T a(u(t),\theta v)dt+\int_0^T(u^3,\theta v)dt+\delta\int_0^T(u',\theta v)dt=\int_0^T(f,\theta v)dt \quad (iv)$$

$\forall v\in H^1_0(\Omega)\cap L^4(\Omega)$

Comparando (iii) y (iv); tenemos: $u'(0)=u_1$

2.2. Unicidad de la solución

Sean u, v soluciones del problema tales que $u(0) = v(0) = u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$ y $u^{'}(0) = v^{'}(0) = u_1 \in L^2(\Omega)$. Defina $w = u - v$, entonces w es solución de:

$$\begin{aligned} w^{''} - \triangle w + u^3 - v^3 + \delta w^{'} = 0 \\ w(0) = 0, w^{'}(0) = 0 \\ w \in L^{\infty}(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)) \\ w^{'} \in L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \end{aligned} \tag{2.30}$$

multiplicando (2.30) por $w^{'}$ e integrando sobre Ω

$$\begin{aligned} (w^{''}, w^{'}) + (-\triangle w, w^{'}) + (u^3 - v^3, w^{'}) + \delta(w^{'}, w^{'}) &= 0 \\ \int_{\Omega} w^{''} w^{'} dx + \int_{\Omega} -\triangle w w^{'} dx + \int_{\Omega} (u^3 - v^3) w^{'} dx + \delta \int_{\Omega} w^{'} w^{'} dx &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w^{'}|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla w|^2 + \delta |w^{'}|_{L^2}^2 &= \int_{\Omega} (v^3 - u^3) w^{'} dx \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{ |w^{'}|_{L^2}^2 + \|w\|_{H_0^1}^2 \right\} + \delta |w^{'}|_{L^2}^2 &= \int_{\Omega} (v^3 - u^3) w^{'} dx \end{aligned}$$

Mayorando por el lado izquierdo y derecho:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{ |w^{'}|_{L^2}^2 + \|w\|_{H_0^1}^2 \right\} \leq \int_{\Omega} |v^3 - u^3||w^{'}| dx \qquad (2{,}31)$$

Observación 7:

$$\begin{aligned} \left|v^3 - u^3\right| &= |v - u| \left|u^2 + uv + v^2\right| \\ &\leq |w| \left(\left|u^2\right| + |uv| + \left|v^2\right|\right) \\ &\leq |w| \left(u^2 + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + v^2\right) \\ &\leq \frac{3}{2} |w| \left(u^2 + v^2\right) \\ |v^3 - u^3| &\leq \frac{3}{2} |w| \left(u^2 + v^2\right) \end{aligned}$$

De la observación 7, se tiene en (2.31)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|w^{'}|^2_{L^2}+\|w\|^2_{H_0^1}\right\} &\leq 3\int_\Omega (u^2+v^2)|w||w^{'}|dx \\
&\leq 3\int_\Omega u^2|w(t)||w^{'}(t)|dx + 3\int_\Omega v^2|w(t)||w^{'}(t)|dx \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

Se tiene que:

(2.33) $u(t)\in H_0^1(\Omega)\cap L^4(\Omega)\hookrightarrow L^6(\Omega)$ para $n=3 \quad \Rightarrow u^2(t)\in L^3(\Omega)$

(2.34) $w(t)=u(t)-v(t)\in H_0^1(\Omega)\cap L^4(\Omega)\hookrightarrow L^6(\Omega)$

(2.35) $w^{'}(t)=u^{'}(t)-v^{'}(t)\in L^2(\Omega)$

(2.36) Por la desigualdad de Holder para: $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=1$ y $H_0^1\hookrightarrow L^6$

De (2.33)-(2.36) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |u^2(x,t)||w(x,t)||w^{'}(x,t)|dx &\leq |u^2(t)|_{L^3(\Omega)}.|w(t)|_{L^6(\Omega)}.|w^{'}(t)|_{L^2(\Omega)} \\
&= |u(t)|^2_{L^6(\Omega)}.|w(t)|_{L^6(\Omega)}.|w^{'}(t)|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq c_p\|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}.\|w(t)\|_{H_0^1(\Omega)}.|w^{'}(t)|_{L^2(\Omega)} \\
\int_\Omega |u^2(x,t)||w(x,t)||w^{'}(x,t)|dx &\leq K_1\|w(t)\|_{H_0^1(\Omega)}.|w^{'}(t)|_{L^2(\Omega)} \qquad (2.37)
\end{aligned}
$$

donde $K_1 := c_p supess\left\{\|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}/t\in\langle 0,T\rangle\right\}$
Analogamente para v; se obtiene:

$$
\int_\Omega |v^2(x,t)||w(x,t)||w^{'}(x,t)|dx \leq K_2\|w(t)\|_{H_0^1(\Omega)}.|w^{'}(t)|_{L^2(\Omega)} \qquad (2,38)
$$

donde $K_2 := c_p supess\left\{\|v(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}/t\in\langle 0,T\rangle\right\}$

De (2.38) y (2.39) en (2.32):

$$
\frac{d}{dt}\left\{|w^{'}|^2_{L^2}+\|w\|^2_{H_0^1}\right\}\leq 3(K_1+K_2)\|w(t)\|_{H_0^1(\Omega)}|w^{'}(t)|_{L^2(\Omega)}
$$

Integrando de 0 a t y recordando $w(0)=w^{'}(0)=0$

$$
\|w(s)\|^2_{H_0^1}+|w^{'}(s)|^2_{L^2}\leq K\int_0^t\left\{\|w(s)\|_{H_0^1}+|w^{'}(s)|_{L^2}\right\}ds
$$

y por la **Desigualdad de Gronwall** obtenemos:

$$|w^{'}(t)|_{L^2}^2 + \|w(t)\|_{H_0^1}^2 = 0 \quad \forall t \in [0,T]$$

$$\Rightarrow w(t) = 0, \quad \forall t \in [0,T] \qquad \therefore \qquad u(x,t) = v(x,t)$$

Bibliografía

[1] ADAMS, R.A., Sobolev Spaces. Academic Press, New York. (1975).

[2] BREZIS H., Análisis Funcional Teoria y Aplicaiones. Alianza Editorial S.A., (1984).

[3] DAFADERMOS, C.M., Asymptotic behavior of solutions of evolution equations in "Nonlinear Evolution Equations",M.G. Grandall ed., Academic Prees, New York, pp 103-203.(1978)

[4] LIONS,J.L.,Quelques Méthodes de Résolution des Problems aux límites non lineaires Dunod-Gauthier-Villas,Paris.(1960).

[5] LIONS,L.L., and MAGENES,E., Problemes aux límites non homogenes et applications. Vol. 1 , Paris.(1968).

[6] CAÑIZO RINCÓN, J.A., Ecuaciones diferenciales ordinarias en el sentido Carathéodory. (2004)

[7] ELON LAGES LIMA, Álgebra Lineal.(1998)

[8] FRED BRAUER and JHON A. NOHEL., The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations An introdución

[9] VALÉRIA IÓRIO., EDP Un curso de graduación.IMCA Instituto de Matemática y Ciencias Afines - UNI

[10] TOM APOSTOL, Análisis Matemático

[11] MARCELO MOREIRA CAVALCANTI y VALERIA NEVES DOMINGOS CAVALCANTI,Iniciación en la teoria de las distribuciones en los espacios de Sobolev

[12] L.A. MEDEIROS - M.MILLA MIRANDA,Introducción a los espacios de Sobolev y las Ecuaciones Diferenciales Parciales.Rio de Janeiro,RJ(1989)

[13] JOSÉ ALFREDO CAIZO RINCÓN,Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en el sentido Carathéodory (2004).